

РАЗДЕЛ № 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Тема № 5. Решение задач целочисленного программирования.

Практическое занятие 5.3

Тема практического занятия «Градиентный метод оптимизации».

Учебные вопросы:

1. Общая характеристика задач, для решения которых целесообразно использовать градиентный метод.
2. Постановка задачи.
3. Алгоритм применения градиентного метода.

Вопросы для повторения предыдущего материала

- а) постановка задачи о ранце;
- б) основные этапы решения задач целочисленного программирования методом полного перебора;
- в) порядок построения дерева возможных вариантов.

Решение задач градиентным методом заключается в отыскании экстремального значения целевой функции путем последовательных шагов по направлению градиента. При этом, если сопоставить с методом перебора, в решение последовательно будет включаться не любой очередной элемент, а элемент, который на данном шаге обеспечивал бы максимально возможное уменьшение стоимости на единицу затрат, или, иными словами, элемент, который характеризуется максимальным отношением приращения стоимости к приращению ограничения.

Постановка задачи.

Пусть в рамках проведения АСДНР необходимо выполнить n мероприятий. Каждое мероприятие может быть выполнено k способами. Время выполнения мероприятий каждым способом задано (таблица 1). Также задана требуемая численность личного состава для выполнения мероприятий каждым способом (таблица 2). Необходимо определить такой способ выполнения каждого мероприятия, чтобы суммарное время выполнения всего комплекса мероприятий было минимально при выполнении ограничений на выделенную численность личного состава, т.е.

Необходимо найти

$$\min_{x_j} \sum_{j=1}^4 c_j(x_j) \quad (1)$$

При ограничениях

$$\sum_{j=1}^4 d_j(x_j) \leq 15 \quad (2)$$

$$x_j \in \{1, 4\}, j = \overline{1, 4}$$

Таблица 1

	1	2	3	4
1	15	12	9	3
2	10	6	3	1
3	18	14	10	6
4	12	6	4	2

Таблица 2

$x_j \backslash$	1	2	3	4
1	2	4	8	12
2	1	2	4	10
3	3	7	14	16
4	4	7	9	10

В соответствии с градиентным методом сначала рассматривается исходная система, состоящая из n подсистем. Причем, в качестве исходной системы принимается система, у которой $x_j = 1 \forall j = \overline{1, n}$. (В задаче о ранце $x_j = 0 \forall j = \overline{1, n}$. Исходная система обладает максимальной стоимостью и минимальным значением ограничения. Заметим, что если условие (2) при этом не выполняется, то задача решения не имеет.

Не нарушая общности примем, что $m = 1$ и обозначим $d_{jY}(x_i) = d_j(x_j)$.

Допустим, что и процессе решения сделано $k - 1$ шагов. При этом номер подсистем соответственно равны $x_j^{(k-1)} \forall j = \overline{1, n}$

$$C^{(k-1)} = \sum_{j=0}^n c_j(x_j^{(k-1)}); D^{(k-1)} = \sum_{j=0}^n d_j(x_j^{(k-1)});$$

На k -м шаге и решение целесообразно включать очередной элемент такой i -той подсистемы, для которой величина h_i^k максимальна, т.е.

$$h_i^k = \max_j h_j, j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где

$$h_i^k = \frac{c_j(x_j^{(k-1)}) - c_j(x_j^{(k-1)} + 1)}{d_j(x_j^{(k-1)} + 1) - d_j(x_j^{(k-1)})} \quad (2)$$

Тогда на k -м шаге

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)}, \quad j = \overline{1, n}, \quad j \neq i; \quad x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} + 1; \\ C^{(k)} = \sum_{j=0}^n c_j(x_j^{(k)}); \quad D^{(k-1)} = \sum_{j=0}^n d_j(x_j^{(k)}); \quad (3)$$

Условием окончания выбора является выполнение на шаге $k = p$ соотношения:

$$D^{p-1} \leq D \leq D^p \quad (4)$$

В этом случае в качестве решения принимают вектор $X^{(p-1)} = \{x_j^{(p-1)}, j = \overline{1, n}\}$.

Рассмотрим основные шаги вычислительного алгоритма.

1. Составить таблицы исходных данных.

$$2. \text{ Положить } k = 0. \text{ Вычислить } C = \sum_{j=1}^n c_j(x_j = 1) \text{ и } C \\ = \sum_{j=1}^n d_j(x_j = 1).$$

3. Если $D = D^0$, перейти к шагу 13.

4. Положить $k = k + 1$.

5. Если $k = 1$, то по выражению (2) вычислить $h_j^k \quad \forall j = \overline{1, n}$, перейти к шагу 7. Иначе перейти к шагу 6.

6. Если $k > 1$, то вычислить только новое значение h_j^k

7. По выражению (1) определить наибольший из градиентов. В соответствии с (3) сформировать новый вектор решения и определить $C^{(k)}$, $D^{(k)}$.

8. Если $D^k < D^0$, перейти к шагу 4.

9. Если $D^k = D^0$, перейти к шагу 11.

10. Если $D^k > D^0$, перейти к шагу 12.

11. Положить $k = k + 1$.

12. В качестве приближенного решения принять

$$X^* = X^{(k-1)}, C^* = C^{(k-1)}, D^* = D^{(k-1)},$$

13. Конец решения

Замечание. Если число ограничений $m \geq 2$, то задачу решают по каждому ограничению отдельно и в качестве приближенного решения принимают такое, которое обеспечивает наихудшее значение целевой функции.

Задание на самоподготовку.

Повторить материалы практического занятия и подготовиться к ответам на следующие вопросы:

- а) понятие градиента и его физический смысл;
- б) пример постановки задачи для решения на основе градиентного метода оптимизации;
- в) основные этапы решения задач на основе градиентного метода оптимизации.

Список литературы для углубленного изучения материалов практического занятия

1. Математические методы и модели исследования операций: учебник / ред. В.А. Колемаев. - Москва: Юнити-Дана, 2015. - 592 с. [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114719>. [стр. 139 – 141].
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике: учебник для академического бакалавриата. – М.: Издательство ЮРАЙТ, 2014. – 438 с. [стр. 198 – 202].
3. Козлов В.Н. Системный анализ, оптимизация и принятие решений. Учебное пособие. – М.: Проспект, 2010. – 176 с. [стр. 68 – 78].

4. Ширяев В.И. Исследование операций и численные методы оптимизации: Учебное пособие. – М.: ЛЕНАРД, 2015. – 216 с. [стр. 125 – 158].